Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А.Г. ДОРФМАН

ОПТИКА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

*

ФИЗМАТГИЗ • 1959

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 31

А. Г. ДОРФМАН

ОПТИКА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

11-2-1

АННОТАЦИЯ

В предлагаемой книге рассматриваются оптические свойства конических сечений (эллипса, гиперболы, параболы).

Книга рассчитана на учащихся старших классов и может быть использована для работы в школьных математических кружках.

В основу книги положены лекции, прочитанные автором в школьном математическом кружке при Сталинградском педагогическом институте.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка рассчитана на широкий круг читателей, в особенности на участников и руководителей школьных и студенческих математических кружков. Содержащийся в ней материал по геометрической оптике может быть использован и в кружках физики.

Из четырех разделов книжки два первых посвящаются общим сведениям о конических сечениях, два последующих — собственно оптическим свойствам этих кривых. Каждый раздел заканчивается дополнением (отмеченным звездочкой), которое предназначено главным образом для более углубленных занятий и может быть опущено без ущерба для понимания остального текста.

В основу книжки положены лекции, прочитанные мною на школьном математическом кружке при Сталинградском государственном педагогическом институте.

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность В. Г. Болтянскому, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд критических замечаний.

Автор

I. КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

1. Совокупность всех прямых, проходящих через одну и ту же точку S и касающихся сферы (рис. 1), образует поверхность, называемую конусом. Каждая из этих прямых называется образующей конуса.

Обе поверхности — сфера и конус — касаются по окружности n. Точка S называется вершиной конуса. Прямая, проходящая через эту точку и центр сферы, является осью вращения конуса.

Вершина делит конус на две симметрично расположенные части. Каждая из них называется полóй конуса. Часть пространства, ограниченная полой, называется полостью конуса.

Таким образом, конус состоит из двух пол и соответственно имеет две полости.

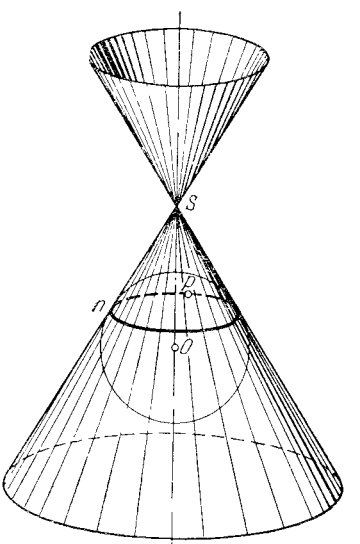

Рис. 1.

2. Каждое плоское сечение конуса называется коническим сечением.

Плоскости, проходящие через вершину конуса, дают три вида сечений: точку, прямую и пару прямых.

В первом случае (рис. 2) плоскость пересекает все образующие конуса. Очевидно, параллельное сечение имеет вид замкнутой овальной кривой, более или менее

вытянутой в зависимости от наклона к оси конуса. Такое сечение называется эллипсом[1]).

Во втором случае (рис. 3) плоскость пересекает все образующие, за исключением одной из них. Вдоль этой образующей плоскость касается конуса. Параллельное сечение является бесконечной кривой, называемой параболой.

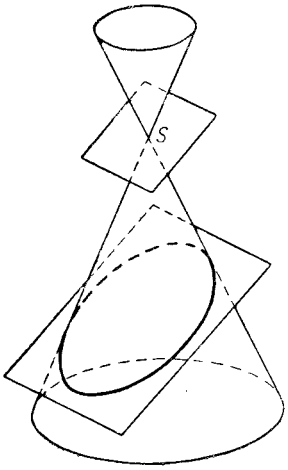

Рис. 2.

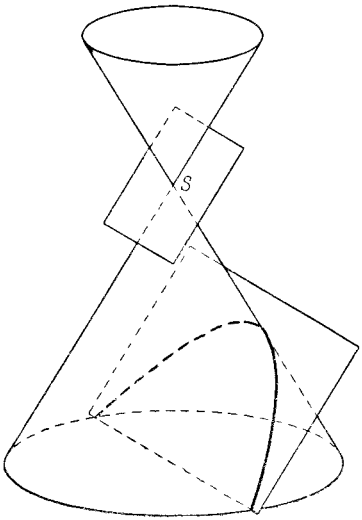

Рис. 3.

Наконец, в третьем случае (рис. 4) плоскость пересекает все образующие, кроме двух из них. Параллельное сечение состоит из двух бесконечных ветвей, по одной на каждой полé конуса. Это сечение называется гиперболой.

На первый взгляд парабола и ветвь гиперболы почти неразличимы. Однако нетрудно понять, что наблюдателю, находящемуся в вершине конуса, полуветви параболы покажутся сходящимися к одной точке на «горизонте» («видимой» в направлении образующей, параллельной плоскости параболы), а полуветви гиперболы — расходящимися к двум точкам «горизонта» («видимым» в направлениях образующих, параллельных плоскости гиперболы).

---

[1]) Если плоскость перпендикулярна к оси, получается окружность — предельный случай эллипса.

3. Для более подробного ознакомления с коническими сечениями требуются некоторые дополнительные построения. В основе большинства из них лежат две простые теоремы:

(а) *Если a и b — две касательные к сфере, проведенные из одной и той же точки S, то отрезки этих касательных от общей точки S до точек касания A и B равны между собой* (рис. 5).

(б) *Если α и β — две плоскости, пересекающиеся по прямой c и касающиеся сферы в точках A и B, то отрезки касательных, проведенных из любой точки прямой c к точкам A и B, образуют равные углы с прямой c* (рис. 6).

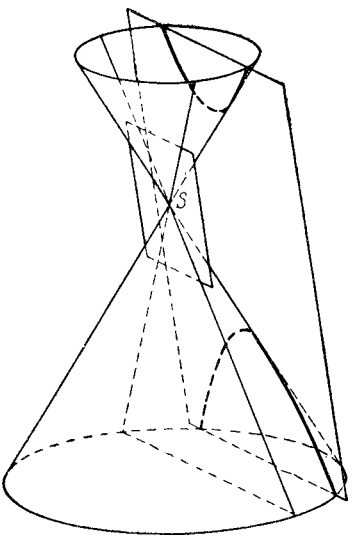

Рис. 4.

4*. [1]) Заставим точку S перемещаться по продолжению радиуса OP сферы (рис. 1). По мере того как эта точка будет приближаться к концу радиуса, конус все более будет

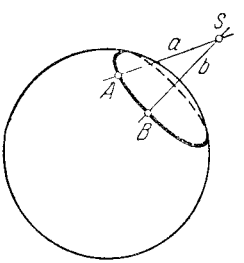

Рис. 5.

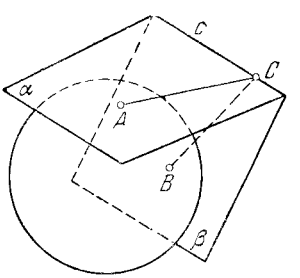

Рис. 6.

«выравниваться». В пределе он сольется с касательной плоскостью к сфере в точке P; при этом окружность касания n

[1]) Для понимания основного текста чтение пунктов, отмеченных звездочкой, не требуется.

обратится в точку касания P, а образующие перейдут в касательные к сфере в этой точке (рис. 7).

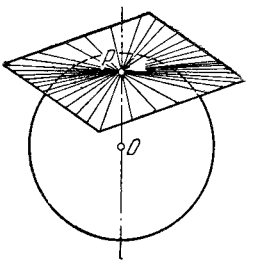

Рис. 7.

Если, напротив, точка S будет удаляться по продолжению радиуса OP, то конус все более будет «вытягиваться». В пределе окружность касания n перейдет в большой круг сферы — «экватор», а все образующие конуса окажутся параллельными между собой. Конус превратится в поверхность, называемую цилиндром (рис. 8).

Рассмотрим наклонное сечение цилиндра — эллипс[1]).

1) Приведем в соприкосновение с плоскостью сечения две сферы, вписанные в цилиндр (рис. 9). Точки прикосновения обозначим через F_1 и F_2. Произвольную точку M сечения соединим с точками F_1 и F_2 отрезками F_1M и F_2M. Через ту же точку M проведем образующую, касающуюся сфер в точках N_1 и N_2 (на окружностях n_1 и n_2).

Согласно теореме (а)

$$F_1M = N_1M,$$
$$F_2M = N_2M.$$

Но $N_1M + N_2M = N_1N_2$. Значит,

$$F_1M + F_2M = N_1N_2,$$

т. е. *сумма расстояний от произвольной точки сечения до двух неподвижных точек F_1 и F_2 постоянна* (не зависит от выбора точки M).

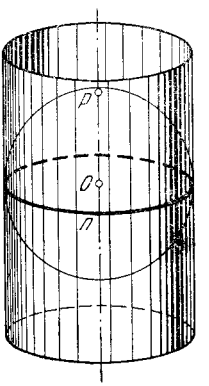

Рис. 8.

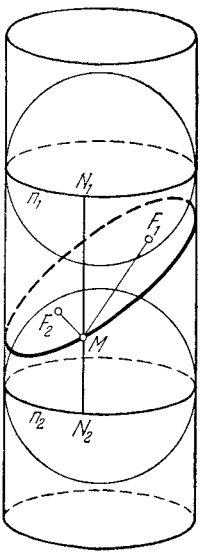

Рис. 9.

2) Плоскости окружностей n_1, n_2 и плоскость эллипса пересекаются по прямым d_1, d_2 (рис. 10). Проведем две

[1]) То, что это сечение действительно есть эллипс в том смысле, как он определен в п. 2, ясно из дальнейшего (см. приложение 7).

плоскости перпендикулярно к этим прямым: одну — через ось цилиндра и точки F_1, F_2; другую — через какую-нибудь точку M эллипса. Первая плоскость пересекает цилиндр по образующим AC и $A'C'$, вторая — по образующим MN и $M'N'$.

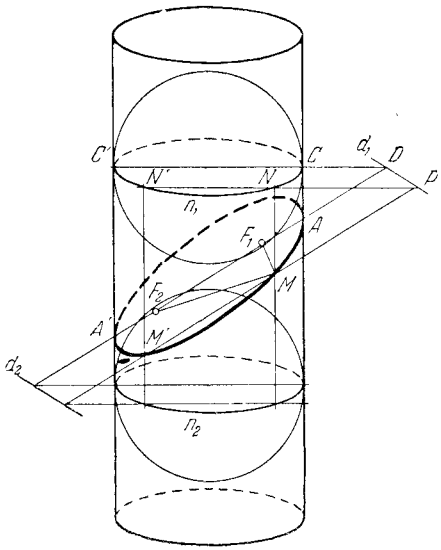

Рис. 10.

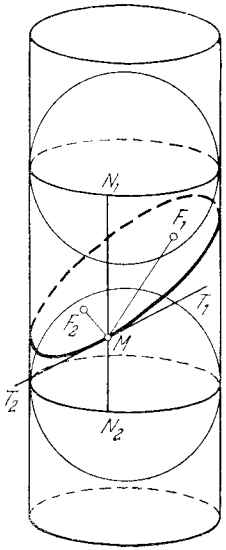

Рис. 11.

Треугольники MNP и ACD подобны (так как имеют соответственно параллельные стороны). Поэтому

$$\frac{MN}{MP} = \frac{AC}{CD}.$$

Но по теореме (а) $MN = MF_1$. Следовательно,

$$\frac{MF_1}{MP} = \frac{AC}{CD},$$

т. е. *отношение расстояния от произвольной точки сечения до неподвижной точки F_1 к расстоянию до неподвижной прямой d_1 постоянно.*

3) Плоскость эллиптического сечения и плоскость, касающаяся цилиндра, пересекаются по прямой T_1T_2, касающейся эллипса (рис. 11).

Обе плоскости касаются «верхней» сферы в точках F_1 и N_1; поэтому согласно теореме (б)

$$\angle F_1MT_1 = \angle T_1MN_1. \qquad (1)$$

Эти же плоскости касаются «нижней» сферы в точках F_2 и N_2. Значит, снова по теореме (б)

$$\angle F_2MT_2 = \angle T_2MN_2. \qquad (2)$$

Но углы в правых частях (1) и (2) равны как вертикальные. Следовательно, равны углы и в левых частях:

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_2,$$

т. е. *в произвольной точке M сечения отрезки F_1M и F_2M образуют равные углы с касательной.*

Исследуя в дальнейшем конические сечения, мы часто будем пользоваться теми же идеями, какими только что пользовались применительно к предельному случаю конуса — цилиндру.

Приложения

1. По одну сторону круга (на его оси) помещен точечный источник света, а по другую сторону — плоский экран. Какой вид имеет очертание тени круга в зависимости от наклона экрана?

Ответ. Окружность, эллипс, парабола, ветвь гиперболы.

2. Доказать, что расстояние между точками M_1 и M_2 параболы (гиперболы) неограниченно возрастает при неограниченном удалении этих точек по параболе (гиперболе).

Указание. Предварительно выяснить, как изменяется длина отрезка M_1M_2 — общей хорды кругового сечения конуса и параболы (гиперболы).

3. Доказать теоремы (а) и (б) п. 3.

4. Во что перейдет окружность, начерченная на конусе, при указанном в п. 4 обращении конуса в плоскость (если при этом каждая образующая перемещается, как твердое тело, поворачиваясь вокруг точки S)?

Ответ. В окружность.

5. Доказать, что геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек постоянна, есть эллипс — наклонное сечение цилиндра.

6. Полагая, что r и δ — расстояния точки M плоскости эллипса от F_1 и d_1 соответственно (рис. 10), доказать, что на касательной отношение $\frac{r}{\delta}$ принимает наименьшее значение в точке касания.

Указание. Выяснить, как изменяется отношение $\frac{r}{\delta}$ на прямой, параллельной d_1.

II. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

5. Рассмотрим эллиптическое сечение конуса (рис. 12). Приведем в соприкосновение с плоскостью сечения две сферы, вписанные в конус. Точки прикосновения F_1 и F_2, называемые фокусами эллипса, соединим с произвольной точкой M сечения отрезками $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$; эти отрезки называются фокальными радиусами-векторами точки M. Образующая, проходящая через точку M, касается сфер в точках N_1 и N_2. Длина отрезка N_1N_2 не зависит от выбора точки M (и обозначается через $2a$). Согласно теореме (а)

$$F_1M = N_1M, \qquad F_2M = N_2M.$$

Но

$$N_1M + N_2M = N_1N_2.$$

Значит,

$$F_1M + F_2M = N_1N_2. \qquad (3)$$

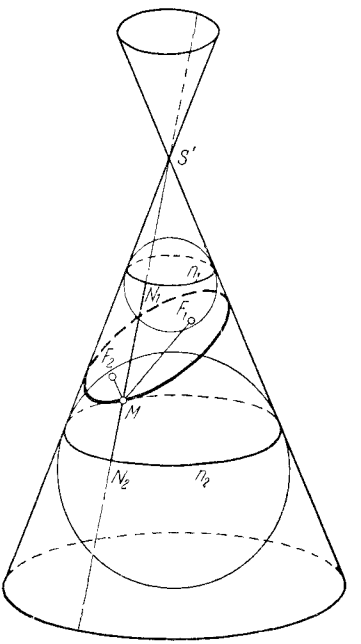

Рис. 12.

Равенство (3) показывает, что *эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек постоянна*[1]).

[1]) Обратно, геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек постоянна, есть эллипс — сечение конуса (см. приложение 7).

Пользуясь формулой (3), легко установить многие свойства эллипса (в частности, такие, которые не усматриваются «сразу» из его определения, принятого в п. 2). Отметим следующие.

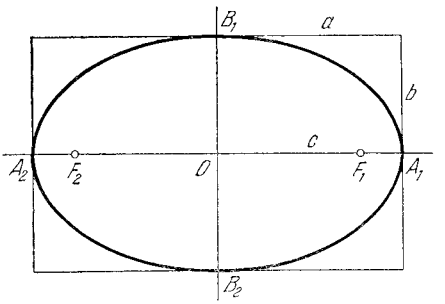

Рис. 13.

Средняя точка O отрезка $F_1F_2 = 2c$ (рис. 13) является центром симметрии эллипса. Прямая, проходящая через фокусы, является осью симметрии и называется фокальной осью. Прямая, проходящая через центр O перпендикулярно к фокальной оси, также является осью симметрии. Эллипс пересекается с осями в точках A_1, A_2 и B_1, B_2, называемых вершинами эллипса. Они являются серединами сторон описанного прямоугольника. Отрезок A_1A_2 фокальной оси называется большим диаметром эллипса; он равен отрезку N_1N_2 образующей конуса: $A_1A_2 = N_1N_2 = 2a$. Отрезок $B_1B_2 = 2b$ называется малым диаметром эллипса (очевидно, $b^2 = a^2 - c^2$).

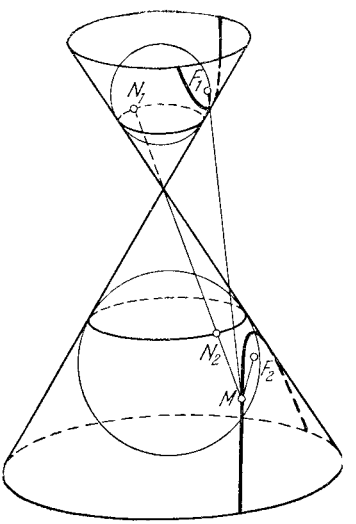

Рис. 14.

Эллипс тем более отличается от окружности, чем больше отношение отрезка $F_1F_2 = 2c$ к отрезку $A_1A_2 = 2a$. Это отношение называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет окружности равен нулю.

6. Рассмотрим теперь гиперболическое сечение (рис. 14).

Так же, как и в случае эллипса, имеются две вписанные в конус сферы, касающиеся плоскости сечения (с той, однако, разницей, что они расположены в разных полáх конуса). Точки касания F_1 и F_2, называемые фокусами гиперболы,

соединим с произвольной точкой M сечения, т. е. проведем так называемые фокальные радиусы-векторы $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ точки M гиперболы. Образующая, проходящая через точку M, касается сфер в точках N_1 и N_2, определяющих отрезок $N_1N_2 = 2a$ (его длина не зависит от положения точки M).

По построению

$$N_1M - N_2M = N_1N_2.$$

По теореме (а)

$$F_1M = N_1M, \quad F_2M = N_2M.$$

Значит,

$$F_1M - F_2M = N_1N_2. \quad (4)$$

Если выберем точку M на другой ветви гиперболы, то аналогичным образом получим:

$$F_2M - F_1M = N_1N_2. \quad (5)$$

Две формулы—(4) и (5)—можно записать в виде одной

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (6)$$

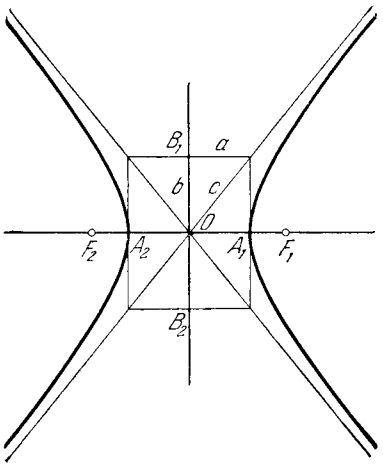

Рис. 15.

Эта краткая формула показывает, что *гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух фиксированных точек постоянна*[1]).

При помощи формулы (6) устанавливается, что гипербола имеет центр симметрии O (рис. 15), делящий отрезок $F_1F_2 = 2c$ пополам, и две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Одна из них называется фокальной или действительной осью; она проходит через фокусы и пересекает гиперболу в двух точках A_1, A_2 — вершинах гиперболы; другая из них не пересекает гиперболу и называется мнимой осью. Отрезок A_1A_2 действительной оси называется диаметром гиперболы. Он равен отрезку N_1N_2 образующей конуса, т. е. $A_1A_2 = 2a$.

Гипербола, аналогично эллипсу, вполне определяется прямоугольником, симметричным относительно осей и отсекающим на них отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ ($b^2 = c^2 - a^2$). Прямые, на которых лежат диагонали этого прямоугольника,

[1]) См. приложение 8.

называются асимптотами гиперболы. Гипербола заключена внутри одной пары вертикальных углов между ними и неограниченно приближается к ним по мере удаления в бесконечность (приложение 15).

7. Наконец, рассмотрим параболическое сечение (рис. 16). В этом случае существует только одна сфера, вписанная в конус и касающаяся плоскости сечения. Точка касания F называется фокусом параболы.

Плоскость окружности n и плоскость параболы пересекаются по прямой d, называемой директрисой параболы.

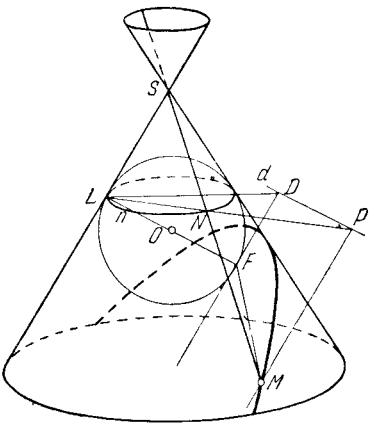

Рис. 16.

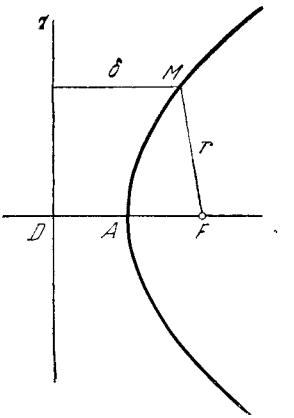

Рис. 17.

Покажем, что *любая точка M параболы равноудалена от фокуса F и директрисы d.*

Для этого заметим, что образующая, параллельная плоскости параболы, касается сферы в точке L, диаметрально противоположной фокусу, а плоскость SLM пересекает плоскость параболы по прямой MP, перпендикулярной к директрисе.

В плоскости SLM лежит образующая SM, касающаяся сферы в точке N. Очевидно, треугольники SLN и MPN подобны между собой.

По теореме (а) $SL = SN$ и соответственно $MN = MP$. По той же теореме $MN = MF$. Следовательно, $MF = MP$, что и утверждалось.

Прямая FD (рис. 17), проходящая через фокус F перпендикулярно к директрисе, является осью симметрии

параболы. Точка пересечения оси с параболой называется вершиной параболы. Отрезок FD оси (расстояние фокуса от директрисы) называется параметром параболы. Вершина делит его пополам.

8*. Доказанное выше свойство параболы можно выразить таким образом: *парабола является геометрическим местом*

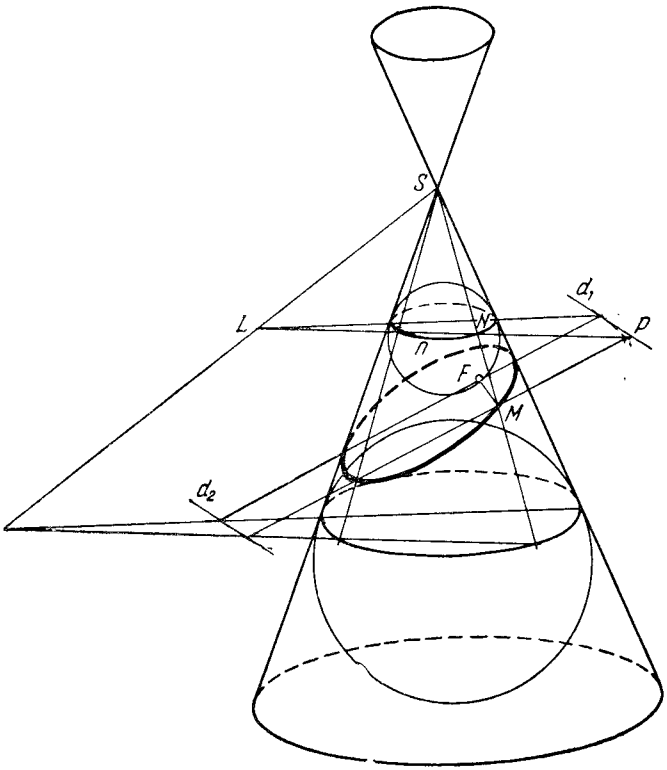

Рис. 18.

точек, отношение расстояний которых от фокуса и директрисы постоянно (равно единице). Аналогичными свойствами обладают эллипс и гипербола.

Плоскости круговых сечений, по которым сферы касаются конуса, и плоскость эллиптического сечения (рис. 18) пересекаются по прямым d_1 и d_2, называемым директрисами эллипса.

Плоскость, проходящая через прямую SL, параллельную фокальной оси эллипса, пересекает конус по образующей SM, а плоскость эллипса — по прямой MP, перпендикулярной директрисам. Образуются подобные треугольники SLN и MPN.

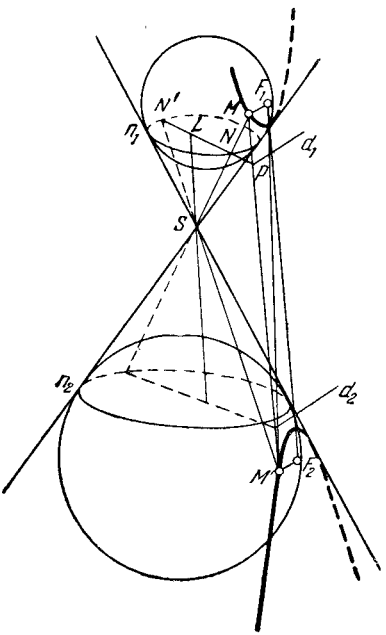

Рис. 19.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{MN}{MP} = \frac{SN}{SL}. \qquad (7)$$

Длины отрезков SN и SL не зависят от положения точки N по окружности n (или точки M на эллипсе). Кроме того, по теореме (а) $MN = FM$; отсюда и из (7) следует, что

$$\frac{FM}{MP} = \frac{SN}{SL}.$$

Эта формула показывает, что *эллипс есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых от фокуса и директрисы постоянно.*

Вполне аналогично устанавливается то же свойство эллипса по отношению к другому фокусу и другой директрисе.

Плоскости круговых сечений n_1 и n_2 и плоскость гиперболы пересекаются по прямым d_1 и d_2, называемым директрисами гиперболы (рис. 19).

Плоскость, проходящая через прямую SL, параллельную фокальной оси гиперболы, пересекает конус по образующим SN и SN', а плоскость гиперболы — по прямой MP, перпендикулярной к директрисам. Образуются подобные треугольники SLN и MPN. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{MN}{MP} = \frac{SN}{SL}. \qquad (8)$$

Правая часть этой пропорции не зависит от выбора точки M (или точки N). По теореме (а) $MN = F_1M$. Отсюда

414—Б

и из (8) получаем:

$$\frac{F_1M}{MP} = \frac{SN}{SL}. \tag{9}$$

Для точки M', взятой на другой ветви, из подобия

$$\triangle M'PN' \sim \triangle SLN'$$

следует пропорция

$$\frac{M'N'}{M'P} = \frac{SN'}{S'L}.$$

Но по теореме (а) $M'N' = F_1M'$; следовательно,

$$\frac{F_1M'}{M'P} = \frac{SN'}{SL}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) показывают, что *гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых от фокуса и директрисы постоянно.*

Аналогичным свойством обладает гипербола относительно фокуса и директрисы, соответствующих «нижней» полé конуса.

Приложения

7. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$. Построить конус, в сечении которого получается данный эллипс.

Указание. Воспользоваться рисунком 12 и свойством вписанной и вневписанной окружностей треугольника (эти окружности касаются стороны треугольника в точках, равноотстоящих от ее концов).

8. Дана гипербола с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$. Построить конус, в сечении которого получается данная гипербола.

Указание. Обобщить способ, указанный в приложении 7.

9. Две плоскости, касающиеся конуса, пересекаются по прямой, перпендикулярной к его оси. Третья плоскость перпендикулярна к первым двум. Доказать, что в сечении конуса и его пары касательных плоскостей третьей плоскостью получается гипербола и ее пара асимптот (в предельном случае — пара образующих, по которым две плоскости касаются конуса).

10. Доказать, что все параболы подобны между собой.

Указание. Использовать свойство параболы, доказанное в п. 7.

11. Доказать, что парабола и любой угол с вершиной внутри параболы пересекаются.

Указание. Предварительно рассмотреть случай, когда вершина угла совпадает с фокусом параболы.

12. Для любой точки M эллипса (гиперболы) справедлива формула $\frac{r}{\delta}=\frac{c}{a}$, где r — расстояние точки M от фокуса, δ — расстояние точки M от директрисы (ближайшей к фокусу). Доказать.

13. Для эллипса и гиперболы, имеющих общие вершины и общую фокальную ось, доказать предложение: если директрисы эллипса проходят через фокусы гиперболы, то директрисы гиперболы проходят через фокусы эллипса, и наоборот.

14. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F и данной окружности C, есть коническое сечение: эллипс, если F лежит внутри C, гипербола, если F лежит вне C; наконец, парабола, если C — прямая (предельный случай окружности).

15. Дана гипербола с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$. Из фокуса F_1 как из центра описана окружность C радиуса $2a$, а из фокуса F_2 проведена касательная F_2G к окружности C. Доказать, что: а) прямая, перпендикулярная к отрезку F_2G и делящая его пополам, есть асимптота гиперболы; б) отрезок перпендикуляра от асимптоты до гиперболы убывает и становится произвольно малым с удалением его в бесконечность.

Указание. Для доказательства утверждения б) использовать построение точек гиперболы, которое следует из приложения 14.

III. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

9. Коническое сечение, не проходящее через вершину конуса (рис. 1—4), можно рассматривать как проекцию окружности на секущую плоскость (проектирующие прямые совпадают с образующими).

Плоскость эллипса и плоскость, касающаяся конуса вдоль образующей SM, пересекаются по прямой T_1T_2 (рис. 20). Эта прямая является проекцией касательной к окружности и называется касательной эллипса.

Покажем, что *фокальные радиусы-векторы образуют равные углы с касательной T_1T_2 в точке M.*

Действительно, с одной стороны, обе плоскости касаются «верхней» сферы в точках N_1 и F_1; отсюда по теореме (б)

$$\angle F_1MT_1 = \angle T_1MN_1. \qquad (11)$$

С другой стороны, эти плоскости касаются «нижней» сферы в точках N_2, F_2; снова по теореме (б)

$$\angle F_2MT_2 = \angle T_2MN_2. \qquad (12)$$

Но углы в правых частях (11) и (12) равны как вертикальные. Следовательно, равны углы и в левых частях, т. е.

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_2. \qquad (13)$$

Утверждение доказано.

Этот результат вместе с известным из оптики *законом зеркального отражения* [1]) приводит к следующему выводу.

Лучи, исходящие из одного фокуса, зеркально отражаясь от эллипса, сходятся в другом фокусе (рис. 21).

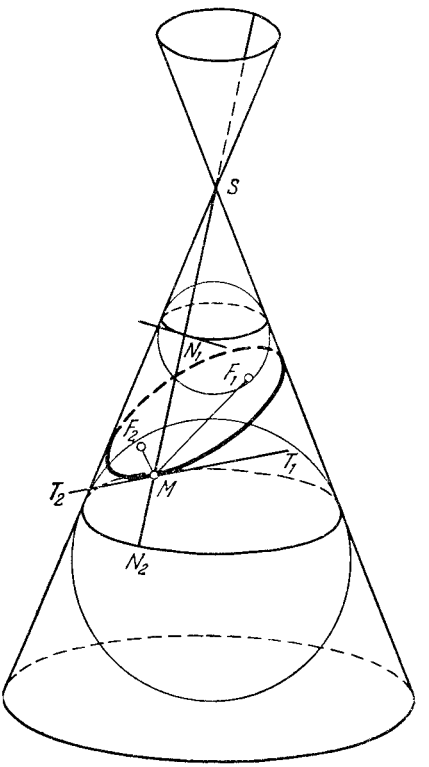

Рис. 20.

10. Пусть далее, M — точка гиперболы (рис. 22). Тогда плоскость, касающаяся конуса в точке M (по образующей SM), пересекает плоскость гиперболы по прямой T_1T_2, касающейся гиперболы. Пользуясь теоремой (б), заключаем, что

$$\angle F_1MT_1 = \angle T_1MN_1,$$
$$\angle T_1MN_1 = \angle T_1MF_2.$$

[1]) В данной точке данной кривой луч падения и луч отражения образуют равные углы с касательной. Иначе говоря, отражение в данной точке кривой происходит по тому же закону, как отражение от касательной в той же точке.

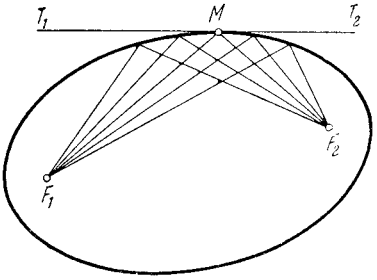

Рис. 21.

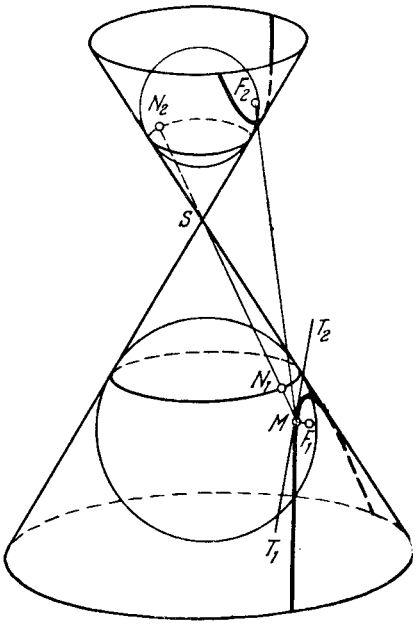

Рис. 22.

Следовательно,

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_1. \qquad (14)$$

Таким образом, *фокальные радиусы-векторы точки M гиперболы образуют равные углы с касательной в этой точке.*

Отсюда согласно закону зеркального отражения (см. сноску на стр. 19) следует, что *лучи, исходящие из одного фокуса,*

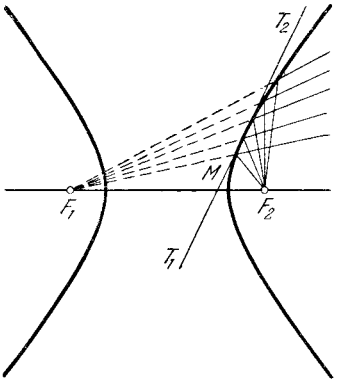

Рис. 23.

зеркально отражаясь от гиперболы, расходятся по направлениям лучей, исходящих из другого фокуса (рис. 23).

11. Переходя к случаю параболы (рис. 24), рассмотрим две касательные плоскости конуса: одну, содержащую образующую SL, параллельную оси параболы; другую, содержащую образующую SM, пересекающую параболу в точке M. Первая из них параллельна плоскости параболы, вторая пересекает эту плоскость по касательной T_1T_2 к параболе в точке M. Обе плоскости пересекаются по прямой ST, параллельной касательной T_1T_2. Плоскость образующих SL и SM пересекает плоскость параболы по прямой L_1L_2, параллельной оси параболы.

Согласно теореме (б)

$$\angle NMT_2 = \angle FMT_2, \quad \angle NST = \angle LST. \qquad (15)$$

Углы в левых частях (15) равны между собой (как внутренние накрест лежащие при параллельных ST и T_1T_2); следовательно,

$$\angle LST = \angle FMT_2.$$

Но очевидно, что

$$\angle LST = \angle L_1MT_1.$$

Значит,

$$\angle FMT_2 = \angle L_1MT_1. \tag{16}$$

Это равенство показывает, что *в каждой точке M параболы фокальный радиус-вектор и луч, параллельный оси, образуют равные углы с касательной.*

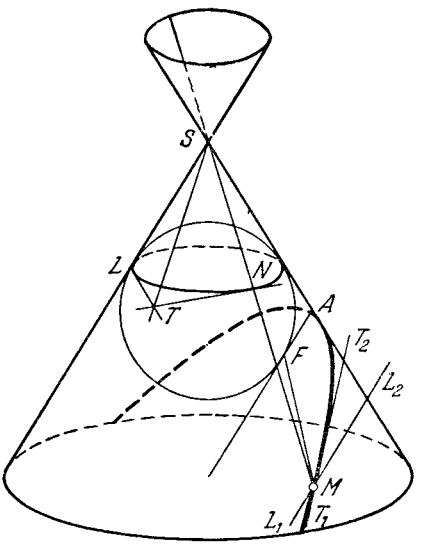

Рис. 24.

Отсюда, как и в п. 9—10, следует, что *лучи, исходящие из фокуса, зеркально отражаясь от параболы, распространяются параллельно оси* (рис. 25).

12*. Получим результаты п. 9—11, совершенно не пользуясь стереометрией.

Пусть дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$ (рис. 26). Для точки M, лежащей на эллипсе, и только для такой точки

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{17}$$

Назовем точку M внутренней точкой эллипса, если

$$r_1 + r_2 < 2a, \tag{18}$$

и его внешней точкой, если

$$r_1 + r_2 > 2a. \tag{19}$$

Среди всех прямых, проходящих через данную точку эллипса, касательная выделяется тем свойством, что все ее точки, кроме точки касания, являются внешними[1]).

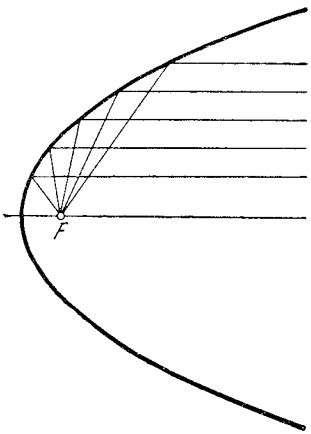

Рис. 25.

Если M — точка касания, а M' — любая другая точка касательной, то вследствие (17) и (19)

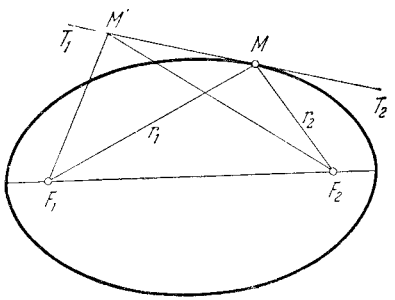

Рис. 26.

ломаная F_1MF_2 короче ломаной $F_1M'F_2$. Вместе с тем, ломаная F_1MF, где F — точка, симметричная F_2 относительно касательной, короче ломаной $F_1M'F$. Но тогда ломаная F_1MF совпадает с отрезком F_1F. Отсюда следует, что

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_2. \tag{20}$$

Рассмотрим, далее, гиперболу с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$ (рис. 27). Для точек M гиперболы и только для них

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{21}$$

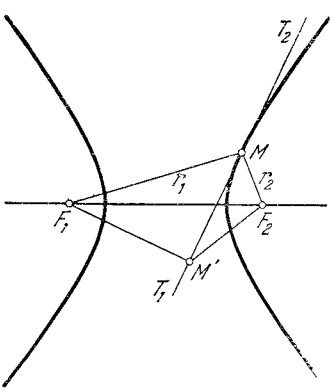

Рис. 27.

[1]) Существование и единственность касательной в данной точке кривой (эллипса, гиперболы или параболы) принимаем без доказательства (см., однако, приложение 21).

Точка M называется внутренней точкой гиперболы, если

$$|r_1 - r_2| > 2a, \tag{22}$$

и ее внешней точкой, если

$$|r_1 - r_2| < 2a. \tag{23}$$

Все точки касательной, кроме точки касания, являются внешними. Пусть M — точка касания, а M' — любая другая точка касательной. Тогда вследствие (21) и (23)

$$|F_1M - F_2M| > |F_1M' - F_2M'|,$$

а поэтому, аналогично случаю эллипса,

$$\angle F_1MT_1 = \angle F_2MT_1. \tag{24}$$

Формула (14) доказана.

Рассмотрим, наконец, параболу с фокусом F и директрисой d (рис. 28). Для точек M параболы и только для них расстояние r от фокуса равно расстоянию δ от директрисы:

$$r = \delta. \tag{25}$$

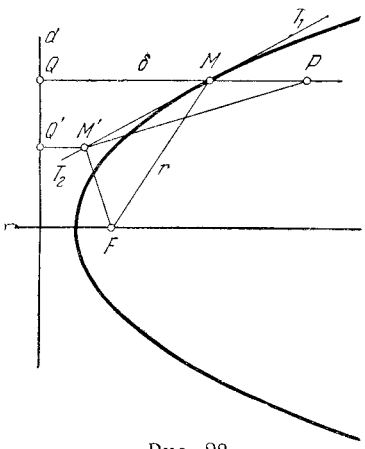

Рис. 28.

Точка M называется внутренней точкой параболы, если

$$r < \delta, \tag{26}$$

и ее внешней точкой, если

$$r > \delta. \tag{27}$$

Прямая, одна точка которой лежит на параболе (а все остальные находятся вне параболы), называется касательной.

Пусть M — точка касания, M' — любая другая точка касательной, P — внутренняя точка параболы, лежащая на прямой MQ, параллельной оси, и $M'Q' \parallel MQ$. Учитывая (25) и (27), запишем очевидные неравенства:

$$PM' + M'F > PM' + M'Q' > PM + MQ.$$

Таким образом, ломаная PMF короче ломаной $PM'F$. Поэтому

$$\angle PMT_1 = \angle FMT_2. \tag{28}$$

Из формул (20), (24) и (28), как и в п. 9—11, следуют оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Приложения

16. Внутри эллипса с фокусами F_1 и F_2 дана точка P. Построить кратчайшую ломаную F_2MP с вершиной M на эллипсе.

Указание. Провести луч F_1P. Точка встречи этого луча и эллипса является вершиной M искомой ломаной. Для доказательства сравнить ломаную F_2MP с ломаной $F_2M'P$, где M' — точка эллипса, отличная от точки M.

17. Внутри гиперболы с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$ дана точка P (со стороны F_1). Построить кратчайшую ломаную F_1MP с вершиной M на гиперболе.

Указание. Провести луч F_2P. Вершина M искомой ломаной F_1MP лежит на пересечении луча с гиперболой. Для доказательства сравнить ломаные F_1MP и $F_1M'P$, где M и M' — точки на одной и той же ветви. Воспользоваться отрезком F_1M' и окружностью с центром F_2 и радиусом $2a$.

18. Внутри параболы с фокусом F и директрисой d дана точка P. Построить кратчайшую ломаную FMP с вершиной M на параболе.

Указание. Из точки P опустить перпендикуляр PQ на директрису. Вершина M искомой ломаной FMP получится в пересечении этого перпендикуляра и параболы. Для доказательства сравнить ломаные FMP и $FM'P$, где M' — точка параболы, отличная от точки M. Воспользоваться перпендикуляром $M'Q'$, опущенным из точки M' параболы на директрису.

19. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проходит произвольная кривая линия $M_1M_0M_2$ с началом M_1 на стороне AD, точкой M_0 на стороне CD и концом M_2 на стороне BC. Пусть M — произвольная точка кривой и известно, что ломаная AM_0B короче ломаной AMB. Доказать, что $\angle AM_0D = \angle BM_0C$.

20. Пользуясь результатами приложений 16—19, получить доказательства теорем п. 9—11 (или п. 12*).

21. Доказать теорему существования и единственности касательной в данной точке данной параболы: биссектриса угла FMQ (рис. 28) и только она является касательной.

Указание. Допущение, что на биссектрисе есть точка P, лежащая внутри параболы, приводит к противоречию: оказывается, что $\triangle MPQ = \triangle MPF$; однако $PQ \neq PF$, по определению внутрен-

ней точки (п. 12), — следовательно, биссектриса — касательная. Касательная неизбежно будет биссектрисой (п. 12).

22. Даны две прямые и точка. На одной из данных прямых определить положение точки, отношение расстояний которой от данной точки и от другой из данных прямых достигает наименьшего значения.

Указание. Воспользоваться приложением 6.

23. Доказать, что касательные плоскости конуса вдоль пары образующих (рис. 4) пересекают плоскость гиперболы по ее асимптотам.

Указание. Исходя из определения асимптот в п. 6, установить предварительно, что асимптота является предельным положением касательной при неограниченном удалении точки касания.

24. Эллипс вместе со своими касательными вращается вокруг фокальной оси. В результате эллипс описывает поверхность, называемую эллипсоидом вращения, а каждая касательная к эллипсу — касательный конус эллипсоида.

Касательная плоскость конуса в точке касания конуса и эллипсоида называется касательной плоскостью эллипсоида. Прямая, проходящая через данную точку поверхности перпендикулярно к касательной плоскости в той же точке, называется нормалью поверхности.

Из геометрической оптики известно, что луч падения и луч отражения лежат в одной плоскости с нормалью и составляют с нею равные углы (закон зеркального отражения).

Показать, что лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от эллипсоида, сходятся в другом фокусе.

IV. ОПТИКА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

13. Существуют ли другие кривые, обладающие такими же оптическими свойствами, какими обладают конические сечения? Например, нет ли кривых, отличных от параболы и отражающих лучи точечного источника по параллельным прямым?

Оказывается — нет. Не существует кривых, отличных от конических сечений и обладающих их оптическими свойствами, их оптикой.

Прежде чем доказать это, сформулируем следующее утверждение.

Если в плоскости, покрытой всевозможными прямыми, параллельными между собой (рис. 29), *помещена произвольная кривая* M_1M_2 (не содержащая отрезков данных прямых), *то на этой кривой существует хотя бы одна точка* M, *в которой касательная*[1]) *не совпадает с прямой покрытия.*

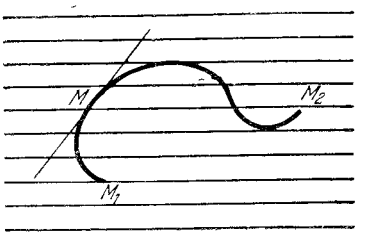

Рис. 29.

Это утверждение представляется настолько очевидным, что вряд ли вызывает какие-либо сомнения. Оно будет применяться в несколько обобщенном виде.

14. Сформулируем теперь следующую теорему.

Если пучок лучей, выходящих из точки F_1, *после отражения от кривой* C *собирается в точке* F_2, *то кривая есть эллипс с фокусами* F_1 и F_2.

Для доказательства покроем плоскость всевозможными эллипсами с фокусами F_1 и F_2 (рис. 30). Назовем эти эллипсы линиями покрытия плоскости. Пусть M — произвольная точка (не лежащая на отрезке F_1F_2). Очевидно, из всех прямых, проходящих через точку M, только та, которая совпадает с касательной к линии покрытия, отражает луч F_1M в точку F_2.

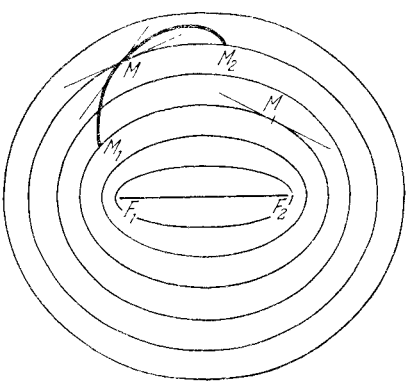

Рис. 30.

Допустим, что какой-либо участок M_1M_2

[1]) Касательная в точке M кривой определяется как предельное положение секущей MM' при неограниченном приближении точки M' по кривой к точке M. Это понятие вводится в первых главах любого курса анализа (см. также вып. 13 настоящей серии: А. И. Маркушевич, Комплексные числа и конформные отображения, Гостехиздат, 1954).

кривой C не принадлежит линии покрытия. Тогда, подобно тому как в п. 14, замечаем, что на этом участке существуют точки, в которых касательные к кривой C не совпадают с касательными к линиям покрытия и, значит, лучи, отраженные кривой C, не попадают в точку F_2, вопреки условию теоремы. Таким образом, кривая C действительно есть эллипс с фокусами F_1 и F_2.

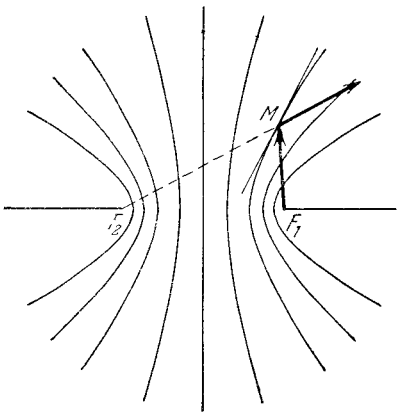

Рис. 31.

Для других конических сечений вопрос, поставленный в п. 13, решается вполне аналогично.

В отношении гиперболы имеет место следующая теорема.

Если пучок лучей, выходящих из точки F_1, после отражения от кривой C, расходится по продолжениям лучей, исходящих из точки F_2, то эта кривая — гипербола с фокусами F_1 и F_2 (или *прямая* — мнимая ось такой гиперболы).

Доказательство этой теоремы проводится, как и в случае эллипса: плоскость покрывается всеми гиперболами с общими фокусами F_1, F_2 и их общей мнимой осью (рис. 31); в каждой точке M покрытия определяется положение прямой, отражающей луч F_1M по направлению луча, исходящего из точки F_2; допущение, что кривая C не принадлежит линии покрытия, приводит к противоречию с условием теоремы (по таким же наглядным соображениям, как в п. 13). Рекомендуем читателю провести доказательство более подробно.

В отношении параболы справедлива следующая теорема.

Если пучок лучей, идущих от точечного источника F, отразившись от кривой C, становится пучком параллельных прямых, то кривая C является параболой с фокусом F (и осью, принадлежащей пучку отраженных лучей).

Эта теорема доказывается, как и предыдущие. Отметим только, что плоскость покрывается параболами с общим фокусом F и общей осью (рис. 32).

Выразим коротко содержание приведенных выше теорем.

Отражение пучка лучей также в виде пучка лучей имеет место для конических и только для конических сечений, когда источник света помещен в одном из фокусов. При этом зеркально отраженные лучи образуют сходящийся, расходящийся или параллельный пучок, смотря по тому, является ли зеркало эллиптическим, гиперболическим или параболическим.

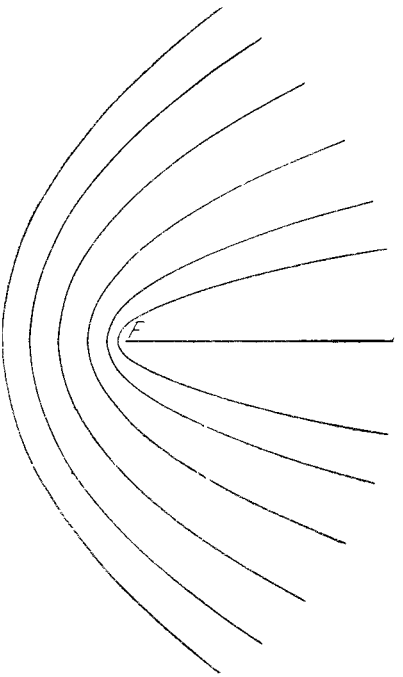

Рис. 32.

15*. В заключение приведем доказательства теорем п. 14 средствами дифференциального исчисления [1]).

Пусть точка $M(x; y)$ описывает кривую C, обладающую оптическим свойством эллипса относительно точек $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$ (рис. 33). Тогда для каждого момента времени t

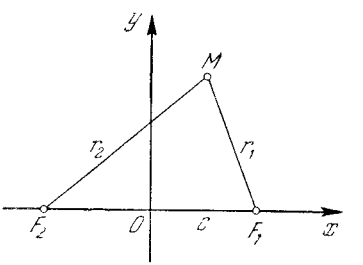

Рис. 33.

сумма расстояний $r_1 + r_2$ точки M от F_1 и F_2 выразится формулой

$$r_1 + r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad (29)$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Дифференцируя (29) по времени t, получим:

$$r_1' + r_2' = \frac{(x-c)\,x' + yy'}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} + \frac{(x+c)\,x' + yy'}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}. \qquad (30)$$

---

[1]) Дифференцирование функций разъясняется в вып. 17 настоящей серии: В. Г. Болтянский, Что такое дифференцирование? Гостехиздат, 1956.

С другой стороны, для точки $M_1(x_1; y_1)$, описывающей эллипс с фокусами F_1, F_2 и диаметром $2a$, имеем:

$$\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}+\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=2a, \tag{31}$$

где $x_1 = x_1(t)$, $y_1 = y_1(t)$. После дифференцирования (31) по t получим:

$$\frac{(x_1-c)\,x_1'+y_1y_1'}{\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}}+\frac{(x_1+c)\,x_1'+y_1y_1'}{\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}}=0. \tag{32}$$

Согласно условию в точке M касательная к кривой C совпадает с касательной к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Поэтому в точке M выполняются равенства

$$x=x_1, \quad y=y_1, \quad x':y'=x_1':y_1' \tag{33}$$

(последнее означает совпадение направлений касательных). Из (30), (32) и (33) следует, что

$$r_1'+r_2'=0.$$

Отсюда

$$r_1+r_2=\text{const},$$

т. е. точка M описывает эллипс с фокусами F_1 и F_2.

Для гиперболы или параболы доказательство аналогично.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
I. Конические сечения 5
II. Эллипс, гипербола, парабола 11
III. Оптические свойства конических сечений 18
IV. Оптика конических сечений 26

Дорфман Абрам Григорьевич.

Оптика конических сечений.

Редактор *Н. А. Угарова.*
Технический редактор *К. Ф. Брудно.*
Корректор *К. В. Булатова.*

Сдано в набор 27/X 1958 г. Подписано к печати 13/III 1959 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 1. Условн. печ. л. 1,64. Уч.-изд. л. 1,29. Тираж 15 000 экз. Т-00943. Цена 40 к. Заказ № 3622.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза. Ленинград,
Измайловский пр., 29.